Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Самарский национальный исследовательский университет

имени академика С.П. Королева»

Институт информатики и кибернетики

Кафедра технической кибернетики

**Отчет по курсовой работе**

Дисциплина: «Численные методы математической физики»

Тема: **«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»**

Вариант № 9

Выполнили студенты: Русецкая А.Е., Сотников А.В., Константинов А.В.

Группа 6407-010302D

Преподаватель Дегтярев А.А.

2 0 2 2

**Задание к курсовой работе:**

1. Осуществить математическую постановку краевой задачи для физического процесса, описанного в предложенном варианте курсовой работы.

2. Осуществить построение разностной схемы, приближающей полученную краевую задачу. При этом следует согласовать с преподавателем тип разностной схемы.

3. Провести теоретическое исследование схемы: показать, что схема аппроксимирует исходную краевую задачу, и найти порядки аппроксимации относительно шагов дискретизации; исследовать устойчивость схемы и сходимость сеточного решения к решению исходной задачи математической физики.

4. Разработать алгоритм численного решения разностной краевой задачи.

5. Разработать компьютерную программу, реализующую созданный алгоритм, с интерфейсом, обеспечивающим следующие возможности: диалоговый режим ввода физических, геометрических и сеточных параметров задачи; графическую визуализацию численного решения задачи.

6. Используя разработанную программу и тестовый пример, согласованный с преподавателем, провести экспериментальное исследование фактической сходимости сеточного решения к точному (вычисленному с помощью ряда Фурье). Исследование сходимости необходимо провести в два этапа. На первом этапе следует убедиться в том, что при измельчении сетки графики разностного решения приближаются (вплоть до исчезновения визуальных различий) к соответствующим графикам точного решения. На втором этапе необходимо, проводя измельчение сетки, сравнить экспериментальную скорость убывания погрешности сеточного решения со скоростью, полученной при теоретическом исследовании схемы.

7. Оформить отчет о проделанной работе в соответствии с требованиями.

**Условие задачи:**

Разработать программу численного моделирования процесса остывания тонкой однородной пластины, имеющей форму диска радиусом и толщиной . Между гранями пластины и окружающей средой, имеющей температуру , происходит теплообмен, описываемый законом Ньютона с коэффициентом теплообмена . На боковой поверхности пластины поддерживается температура . В начальный момент времени тепловое поле пластины обладает осевой симметрией, т.е. распределение температуры по пластине зависит только от радиальной координаты полярной системы, т.е. .

Пластина выполнена из материала, характеризуемого коэффициентами теплопроводности , объемной теплоемкости .

Для численного моделирования процесса теплопроводности в пластине использовать следующие схемы:

* простейшую явную конечно-разностную схему;
* простейшую неявную конечно-разностную схему;
* схему Кранка-Николсона.

При проведении расчетов использовать значения параметров, представленные в таблице 1 и выражение функции :

Таблица 1 – Заданные значения для расчёта суммы ряда

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | 0,5 | 0 | 0 | 0,005 | 150 | 0,065 | 1,35 |

**1 Математическая постановка краевой задачи**

В общем виде уравнение теплопроводности выглядит следующим образом:

, (1.1)

где .

В правой части равенства имеется дробь с переменной в знаменателе. Следовательно, если радиальная координата примет значение , то правая часть выражения потеряет смысл.

Для построения математической модели осесимметричного физического процесса, целесообразно воспользоваться следующим выражением для оператора :

Рассмотрим начальное условие задачи:

. (1.2)

На боковой поверхности поддерживается температура , это означает следующее равенство:

. (1.3)

Используя закон Ньютона о теплопередаче внутри рассматриваемого тела:

,

.

.

По закону Ньютона теплового взаимодействия поверхности объекта с окружающей средой:

,

*→*

,

*→*

Интегральное усреднение:

.

Сделаем усреднение левой части уравнения (1.1), используя теорему Фубини:

.

Усреднение первого слагаемого правой части уравнения (1.1), используя интегрирование по частям, будет выглядеть следующим образом:

*.*

Делая предположение, что , получаем следующее равенство:

*.*

Усреднение второго слагаемого правой части уравнения (1.1):

*.*

*.*

Усреднение начального условия (1.2):

*.*

Усреднение последнего граничного условия (1.3):

,

,

.

Таким образом, после всех подстановок краевая задача будет выглядеть следующим образом:

(1.4)

1. **Простейшая явная конечно-разностная схема (Константинов А.В.)**
   1. **Построение явной конечно-разностной схемы**

Заменим коэффициент теплопроводности на . Определим равномерную сетку как множество узлов (,), где

, , ; (3.1)

, , ,

где – число интервалов разбиения промежутка , – число интервалов разбиения отрезка времени , – шаг разбиения по , – шаг разбиения по .

Для построения явной схемы для задачи (1.4) воспользуемся сеткой

(3.1). Заменим производные следующими разностными отношениями:

Также учтем, что диск обладает осевой симметрией, а значит справедливо равенство . Подставим данные соотношения в исходную задачу и получим следующую разностную схему:

* 1. **Исследование аппроксимации явной конечно-разностной схемы**

Невязка для схемы (3.2) будет иметь структуру:

Рассмотрим каждую компоненту невязки (3.2) в отдельности:

Проведем разложение по формуле Тейлора значений в точке и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

Учитывая первое выражение краевой задачи:

,

получим:

Рассмотрим вторую компоненту невязки (3.2):

Проведем разложение по формуле Тейлора и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

Учитывая, что диск обладает осевой симметрией, рассмотрим равенство:

Следовательно, производные нечетных степеней равны нулю. Таким образом, получим:

Учитывая второе выражение краевой задачи:

получим:

Рассмотрим остальные компоненты невязки (3.2) в отдельности:

Таким образом, невязка (3.2) преобразуется следующим образом:

Определим норму в пространстве формулой:

Тогда погрешность аппроксимации явной схемы в соответствии с формулой выше будет иметь вид:

Мы получили, что неявная разностная схема (3.2) аппроксимирует краевую задачу (1.4) на ее решении 𝑣, причем погрешность аппроксимации имеет второй порядок по шагу и первый по .

1. **Простейшая неявная конечно-разностная схема (Русецкая А.Е.)**
   1. **Построение неявной конечно-разностной схемы**

Заменим коэффициент теплопроводности на . Определим равномерную сетку как множество узлов (,), где

, , ; (3.1)

, , ,

где – число интервалов разбиения промежутка , – число интервалов разбиения отрезка времени , – шаг разбиения по , – шаг разбиения по .

Для построения неявной схемы для задачи (1.4) воспользуемся сеткой

(3.1). Заменим производные следующими разностными отношениями:

Учтем, что диск обладает осевой симметрией, а значит справедливо равенство . В результате будем иметь следующую неявную разностную схему:

(3.2)

* 1. **Исследование аппроксимации неявной конечно-разностной схемы**

Невязка для схемы (3.2) будет иметь структуру:

Рассмотрим каждую компоненту невязки (3.2) в отдельности:

Проведем разложение по формуле Тейлора значений в точке и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

Учитывая первое выражение краевой задачи:

;

получим:

Рассмотрим вторую компоненту невязки (3.2):

Проведем разложение по формуле Тейлора и учтем эти разложения в выражении невязки. В результате получим:

Учитывая, что диск обладает осевой симметрией, рассмотрим равенство:

Следовательно, производные нечетных степеней равны нулю. Таким образом, получим:

Учитывая второе выражение краевой задачи:

получим:

Рассмотрим остальные компоненты невязки (3.2) в отдельности:

Таким образом, невязка (3.2) преобразуется следующим образом:

Определим норму в пространстве формулой:

Тогда погрешность аппроксимации явной схемы в соответствии с формулой выше будет иметь вид:

Мы получили, что неявная разностная схема (3.2) аппроксимирует краевую задачу (1.4) на ее решении 𝑣, причем погрешность аппроксимации имеет второй порядок по шагу и первый по .

**3.3 Решение простейшей неявной конечно-разностной схемы**

Рассмотрим первое соотношение (3.2):

Перепишем его следующим образом:

Сделаем замены в последнем выражении:

Также учтем, что в силу параметров, заданных преподавателем, . Таким образом, получаем:

(3.3)

Рассмотрим второе соотношение (3.2):

Перепишем его следующим образом:

Сделаем замены в последнем выражении:

Учитывая, что в силу параметров, заданных преподавателем,, получаем:

Учитывая, что при и , выражение (3.3) примет вид:

Также учтем, что при .

Запишем систему в следующем виде:

(3.4)

Полученная система (3.4) – это система линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Такая система имеет трёхдиагональную матрицу, поэтому для её решения будем использовать метод прогонки.

Решение системы (3.4) ищем в виде:

Для получения и сначала уменьшим индекс на единицу:

Подставляя во второе соотношение системы (3.4), получим:

Выражая , получим:

Таким образом, получаем рекуррентные соотношения для вычисления прогоночных коэффициентов:

Вычислительная схема метода прогонки состоит из прямого и обратного хода. На прямом ходе вычисляются значения прогоночных коэффициентов по рекуррентным соотношениям, а на обратном – искомые значения .

Для начала прямого хода метода прогонки необходимо задать стартовые значения прогоночных коэффициентов и . При получаем:

Затем последовательно вычисляются коэффициенты и .

Далее необходимо задать значение . При :

Затем вычисляются значения

1. **Схема Кранка-Николсона (Сотников А.В.)**
   1. **Построение схемы Кранка-Николсона**

Заменим коэффициент теплопроводности на . Для построения схемы Кранка-Николсона используем сетку:

, , ; (4.1)

, , ,

где – число интервалов разбиения промежутка , – число интервалов разбиения отрезка времени , – шаг разбиения по , – шаг разбиения по .

Рассмотрим наряду с основными узлами шаблона вспомогательный узел . Используя этот узел, запишем уравнение простейших явной и неявной схем для задачи (1.4)

где - значение решения во вспомогательном узле.

Также учтем, что диск обладает осевой симметрией, а значит справедливо равенство . Приходим к следующей схеме Кранка-Николсона для краевой задачи:

* 1. **Разностное решение задачи**

где ,, .

Рассмотрим первое соотношение из (4.2) для

Преобразуем его следующим образом:

Для сокращения и упрощения выражения введем следующие обозначения:

Преобразуем:

*,*

Исходя из заданного значения :

Получаем:

*,*

Рассмотрим одно из граничных условий:

Преобразуем его к виду:

.

Введём следующие обозначения:

С учётом того, что =0, выражение примет вид:

Также учитывая, что первое выражение из системы при примет вид:

Запишем систему:

Полученная система – это система линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Такая система имеет трёхдиагональную матрицу, поэтому для её решения будем использовать метод прогонки.

Решение системы будем искать в виде:

Для получения и сначала уменьшим индекс на единицу:

Подставляя во второе соотношение системы, получим:

Выражая , получим:

Таким образом, получаем рекуррентные соотношения для вычисления прогоночных коэффициентов:

Вычислительная схема метода прогонки состоит из прямого и обратного хода. На прямом ходе вычисляются значения прогоночных коэффициентов по рекуррентным соотношениям, а на обратном – искомые значения .

Для начала прямого хода метода прогонки необходимо задать стартовые значения прогоночных коэффициентов и . При получаем:

Затем последовательно вычисляются коэффициенты и .

Далее необходимо задать значение :